

<b>Ανακαλύπτοντας τις Πιθανότητες</b>	
<b>Σχετικό Σχέδιο Κατασκευής</b>	Τα κότσια
<b>Περιγραφή</b>	Αφού δημιουργήσετε τα κότσια (ζάρι) σε έναν τρισδιάστατο εκτυπωτή, κάντε μια εισαγωγή στην έννοια των πιθανοτήτων στα μαθηματικά μέσω του παιχνιδιού.
<b>Μαθησιακοί στόχοι</b>	<p>1: Εισαγωγή στο αρχαίο παιχνίδι με τα κότσια</p> <p>2: Εισαγωγή στη θεωρία των πιθανοτήτων μέσω του παιχνιδιού με τα κότσια</p> <p>3: Ο μαθηματικός υπολογισμός των πιθανοτήτων</p>
<b>Σχετικά Μαθήματα</b>	Μαθηματικά (πιθανότητες)
<b>Προ απαιτούμενα υλικά/ προκαταρκτικά βήματα για τους εκπαιδευτικούς</b>	Εκτύπωση των ζαριών σε τρισδιάστατο εκτυπωτή
<b>Προαπαιτούμενα υλικά/ προκαταρκτικά βήματα για τους μαθητές</b>	Η έννοια των πιθανοτήτων

<b>Ηλικιακό εύρος των μαθητών</b>	Ξεκινώντας από το 12
<b>Διάρκεια</b>	1 ώρα
<b>Επίπεδο δυσκολίας</b>	Μεσαίο

### Περιγραφή των δραστηριοτήτων βήμα προς βήμα

#### **Βήμα 1: Εισαγωγή στο αρχαίο παιχνίδι με τα κότσια**

Ο δάσκαλος εξηγεί λίγα πράγματα για το παιχνίδι. Τα κότσια ήταν ουσιαστικά οι αστραγάλοι από τα πίσω πόδια προβάτων, κατσικιών ή ελαφιών. Τους συγκέντρωναν από τα οστά των πίσω ποδιών της γίδας ή του αρνιού και μπορούσαν με αυτά να παίξουν ποικίλα παιχνίδια



Στην αρχαιότητα, οι αρχαίοι Έλληνες και οι Ρωμαίοι χρησιμοποιούσαν αυτούς τους αστραγάλους ως ζάρια παιχνιδιού, προσπαθώντας να επιτύχουν κάποιους συγκεκριμένους συνδυασμούς αριθμών.

Ένα κότσι έχει τέσσερις διαφορετικές έδρες:

- Από τις δύο πλατιές έδρες που διαθέτει, η μία είναι κυρτή και η άλλη κοίλη.
- Από τις δύο στενότερες έδρες που διαθέτει, η μια είναι επίπεδη και η άλλη ελικοειδής.

Καθεμία από τις τέσσερις έδρες είχε διαφορετική «αξία» και σκοπός του παιχνιδιού ήταν να συγκεντρώσει κανείς τους περισσότερους πόντους. Νικητής ήταν εκείνος που κέρδιζε και στους τέσσερις γύρους του παιχνιδιού.

- Η επίπεδη έδρα, γνωστή με την λατινική ονομασία «planum», ισοδυναμούσε με 1,
- Η κοίλη έδρα, «spinum», ισοδυναμούσε με 3,
- Η κυρτή έδρα, «pronum», ισοδυναμούσε με 4,
- Η ελικοειδής έδρα, «tortuosum», ισοδυναμούσε με 6.

Οι αριθμοί 2 και 5 δεν χρησιμοποιούνταν.



Η σύγχρονη εκδοχή του παιχνιδιού είναι αρκετά διαφορετική. Το σύγχρονο παιχνίδι αποτελείται από 5 μεταλλικά ή πλαστικά

ζάρια, ένα εκ των οποίων είναι βαμμένο σε κόκκινο χρώμα, και ονομάζεται «πατέρας».

## Βήμα 2 Η θεωρία των πιθανοτήτων και το παιχνίδι με τα κότσια

Σημειώστε ότι, όπως και με τα σημερινά ζάρια, το άθροισμα των τιμών των αντίθετων εδρών είναι πάντα 7. Επιπλέον, η επιλογή της «αξίας» των εδρών βασίστηκε στην παρατήρηση ότι οι στενές πλευρές έχουν λιγότερες πιθανότητες να εμφανιστούν σε μια ζαριά απ' όσο οι πλατιές έδρες. Έτσι λοιπόν, στο παιχνίδι με τα κότσια, οι αριθμοί 1 και 6 εμφανίζονται λιγότερο συχνά απ' ό,τι οι αριθμοί 3 και 4.

### **Οι κανόνες του αρχαίας εκδοχής του παιχνιδιού**

Σύμφωνα με την αρχαιότερη εκδοχή του παιχνιδιού, τα τέσσερα κότσια ρίχνονταν ταυτόχρονα, ή το ένα μετά το άλλο.

Η πιο ευνοϊκή περίπτωση που θα μπορούσε να συμβεί κατά τη ζαριά ήταν να πετύχει κανείς να φέρει και τα τέσσερα κότσια και στις τέσσερις διαφορετικές έδρες, φαινόμενο το οποίο οι Ρωμαίοι ονόμασαν *Venus* (η λατινική λέξη για την θεά Αφροδίτη). Η χειρότερη περίπτωση ήταν να ρίξει κανείς όλα τα κότσια από την στενή, επίπεδη πλευρά τους, φαινόμενο το οποίο οι Ρωμαίοι ονόμασαν *Canis* (η λατινική λέξη για τον σκύλο).

Ο εκπαιδευτικός σχηματίζει ομάδες 3 ή 4 μαθητών.

Στη συνέχεια, ο εκπαιδευτικός διαμοιράζει στους μαθητές κάθε ομάδα συνολικά 30 κότσια και με την σειρά καλούνται να ρίξουν συνολικά 100 διαδοχικές ρίψεις.

### 1ο Παιχνίδι

- Οι μαθητές ρίχνουν, με τη σειρά, τέσσερα κότσια ταυτόχρονα
- Αν ένας μαθητής πετύχει το σκορ της *Αφροδίτης*, τότε παίρνει την κοινή τράπεζα με τα κότσια της ομάδας
- Αν όχι, τότε καλείται να δώσει στην κοινή τράπεζα τον ισοδύναμο αριθμό κοτσιών που προκύπτει από το άθροισμα της «αξίας» των εδρών που έφερε κατά τη ζαριά (Tortuosum = 6, Pronum = 4, Supinum = 3, Planum = 1)

Στο τέλος τους παιχνιδιού, τα αποτελέσματα των 100 διαδοχικών ρίψεων συνυπολογίζονται με βάση:

- Τον αριθμό των παιχνιδιών που ολοκληρώθηκαν ανάλογα με τον τύπο των εδρών που εμφανίστηκαν
- Τον μέσο αριθμό των ζαριών που ρίχτηκαν για να επιτευχθεί το σκορ της *Αφροδίτης*

Οι μαθητές συζητούν και αναλύουν τα αποτελέσματά τους.

### 3: Ο μαθηματικός υπολογισμός των πιθανοτήτων

Τα κότσια είναι ένα αντικείμενο που είναι εκ φύσεως ασύμμετρο. Λόγω της ασυμμετρίας του, το ενδεχόμενο να πετύχει κανείς μια από τις τέσσερις έδρες του δεν παρουσιάζει τις ίδιες

πιθανότητες να συμβεί σε όλες τις περιπτώσεις στο πείραμα τύχης αυτό.

Σύμφωνα λοιπόν με το παιχνίδι, αν ένας παίκτης έχει συνολικά τέσσερις πιθανότητες σε μια ζαριά, δηλαδή  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  και  $p_4$ , να φέρει τις πλευρές Pronum, Supinum, Planum, και Tortuosum αντίστοιχα, τότε:

$$p_1 = p_2$$

$$p_3 = p_4$$

$$p_1 = 4p_3.$$

Η επίπεδη και η ελικοειδής πλευρά είναι 4 φορές λιγότερο πιθανό να εμφανιστεί σε μια ζαριά απ' ό,τι οι πλατιές πλευρές.

**Στο σημείο αυτό, ο εκπαιδευτικός κάνει την εξής ερώτηση:**

Τι μπορούμε να πούμε για το άθροισμα των πιθανοτήτων

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4;$$

Αθροίστε τις τιμές των  $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ .

>> Ο παίκτης ρίχνει ένα κότσι. Για την πρώτη ζαριά, το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων είναι  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ .

Ο άθροισμα των πιθανοτήτων,  $\sum p_i = 1$ , μας επιτρέπει να γράψουμε:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα από το πείραμα τύχης, συμπεραίνουμε ότι:

$$2p_1 + 2p_3 = 1$$

$$2p_1 + 2(p_1/4) = 1$$

Επομένως,

$$p_1 = p_2 = 2/5$$

$$p_3 = p_4 = 1/10$$

**Μαθηματικές ερωτήσεις που μπορούν να τεθούν στους μαθητές**

α) Πόσες πιθανότητες έχουμε μετά από μία ρίψη ενός κοτσιού;

Μετά από μια ρίψη, έχουμε 2/5 πιθανότητα να πετύχουμε τις έδρες Pronum και Surinum, δηλαδή να επιτύχουμε 4 ή 3 πόντους, και πιθανότητα 1/10 να πετύχουμε τις έδρες Planum και Tortuosum, δηλαδή να κερδίσουμε 6 ή 1 πόντους.

**Για επιπλέον άσκηση, ξανά παίξτε το παιχνίδι με τα κότσια !**

α) Εξετάστε το ενδεχόμενο A: ρίψη ενός μονού αριθμού

Ποια είναι η πιθανότητα να συμβεί αυτή η περίπτωση;

β) Εξετάστε το ενδεχόμενο B: ρίψη των εδρών surinum ή pronum. Ποια είναι η πιθανότητα να συμβεί αυτή η περίπτωση;

## Δραστηριότητες αξιολόγησης

Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να θέσουν τις ακόλουθες ερωτήσεις για την αξιολόγηση της δραστηριότητας:

**Ποιος είναι ο νόμος των πιθανοτήτων;**

**Έχουν όλες οι έδρες ενός κοτσιού τις ίδιες πιθανότητες να εμφανιστούν σε μια ρίψη;**